令和3年度鹿児島大学AO型選抜試験
適性試問

[理学部理学科 数理情報科学プログラム]

令和2年11月17日（9:30 ～12:00）

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと.
2. 配布物は, 問題冊子1部, 解答用紙5枚, 草案用紙5枚である.
3. 問題は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の計5題ある. すべてについて解答すること.
4. 5枚の解答用紙には, $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の問題番号が書いてある. それぞれの解答用紙に解答すること.
5. 受験番号は, 必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること.
6. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし, 裏面には決して記入しないこと.
7. この試問では, 論理的思考力, 論証の記述力を主に評価する. したがって, 解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように, 順序よく的確に表現すること. また, 文字は丁寧に書くこと.
8. 問題冊子と草案用紙は, 各自持ち帰ること.

$\boxed{1}$ 実数 x, y について，(　　) に正しくあてはまるものを下の（イ）～（ニ）の中からひとつ選び，さらにその命題を証明せよ．

(1) $x = y = 0$ は，$x^2 + xy + y^2 = 0$ が成立するための（　　）．

(2) $x < y$ は，$x^2 < y^2$ が成立するための（　　）．

(3) $x = y$ は，$x^2 + y^2 = 2|xy|$ が成立するための（　　）．

（イ）必要十分条件である．

（ロ）必要条件であるが，十分条件でない．

（ハ）十分条件であるが，必要条件でない．

（ニ）必要条件でも十分条件でもない．

$\boxed{2}$ $a > 1$ とする．極方程式

$$r = \frac{1}{a + \cos\theta}$$

で表される図形 C について，以下の問いに答えよ．

(1) 図形 C を，直交座標の x, y の方程式で表せ．

(2) 図形 C を，xy 平面上に図示せよ．

(3) 極方程式 $r = \dfrac{2}{a\sin\theta - \cos\theta}$ で表される図形と図形 C との共有点の個数を求めよ．

$\boxed{3}$ $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし，次の 2 つの関数を考える．

$$f(x) = x^3 - a^2 x \ (x \geqq 0), \qquad g(x) = x^2 - ax \ (x \geqq 0)$$

(1) xy 平面上で，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の原点以外の交点をすべて求めよ．また，$f(x) > g(x)$ を満たす x の範囲を，a を用いて表せ．

$0 \leqq x \leqq a$ で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が囲む部分の面積を $S(a)$ とし，$a \leqq x < 1$ で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が囲む部分の面積を $T(a)$ とする．

(2) $S(a) - T(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S(a) = T(a)$ となる a を求めよ．さらに，$S(a) - T(a)$ は $0 < a < \dfrac{1}{2}$ で a の増加関数であることを示せ．

$\boxed{4}$ $\angle$C が直角である直角三角形 ABC があり, $\angle \mathrm{A} = \theta$ とおく. 点 D は辺 AB 上にあり, $\mathrm{AC} = \mathrm{AD} = 1$ を満たす. また, 点 E は辺 BC 上にあり, $\angle \mathrm{CDE} = \theta$ を満たす.

(1) $\mathrm{CD} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ であることを示せ.

(2) $\angle$BCD, $\angle$CED を θ を用いて表せ.

(3) $\triangle$CDE に対して正弦定理を使い, CE を θ を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}$ を求めよ.

$\boxed{5}$

xy 平面で 2 つのベクトル $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0)$ を考える. 初め動く点 P が原点 O にいる. 確率 p $(0 < p < 1)$ で表が出るコインを繰り返し投げ, 次の規則 (i), (ii) に従って点 P が移動する. n 回コインを投げた後に点 P が移動する点を P_n とおく.

(i) 1 回目にコインを投げたとき, 表が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \vec{a}$, 裏が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \vec{b}$ を満たす点 P_1 に移動する.

(ii) $n+1$ 回目にコインを投げたとき, 表が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \vec{a}$, 裏が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \vec{b}$ を満たす点 P_{n+1} に移動する.

(1) 5 回コインを投げて表が 3 回, 裏が 2 回出たとする. そのとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

(2) 2 回コインを投げた後, P_2 が y 軸上にある確率を求めよ.

(3) n 回コインを投げた後, P_n が y 軸上にある確率を求めよ.

(4) n 回コインを投げた後, P_n の y 座標の値の期待値を求めよ. 必要ならば, 次の式を証明なしに用いてよい. ただし, ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \, k \, p^k (1-p)^{n-k} = np$$