

令和4年度鹿児島大学AO型選抜試験 適性試問

[理学部理学科 数理情報科学プログラム]

令和3年11月16日(9:30～12:00)

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. 配布物は、問題冊子1部、解答用紙5枚、草案用紙5枚である。
3. 問題は **1**～**5** の計5題ある。すべてについて解答すること。
4. 5枚の解答用紙には、**1**～**5** の問題番号が書いてある。それぞれの解答用紙に解答すること。
5. 受験番号は、必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
6. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
7. この試問では、論理的思考力、論証の記述力を主に評価する。したがって、解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。
8. 問題冊子と草案用紙は、各自持ち帰ること。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) 次のデータは、6人のテストの点数であり、平均値が81であった。このとき a の値を求め、さらに中央値を求めよ。ただし、 a の値は0以上の整数である。

$$77 \quad 75 \quad 81 \quad 87 \quad 84 \quad a$$

- (2) $(1+i)^7$ を計算せよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (3) k, n は自然数で、 $2k \leq n$ を満たすとする。このとき、次の不等式を示せ。

$${}_n C_{k-1} < {}_n C_k$$

- (4) 1枚のコインを続けて4回投げる。1回目に表が出る事象を A 、4回とも同じ面が出る事象を B とする。このとき、 A と B は独立かどうか調べよ。

- (5) 体積が V の三角錐 $ABCD$ を考える。辺 AB, AC, AD, BC, CD, DB の中点をそれぞれ E, F, G, H, I, J とする。この三角錐 $ABCD$ から4つの三角錐 $AEFG, BEHJ, CFIH, DGJI$ を取り除いた立体の体積を、 V を用いて表せ。

2 $f(x) = x^3 - 3x$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ が異なる3点で交わり、このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求め、そのグラフをかけ。

- (2) 条件を満たす m の範囲を求めよ。

- (3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ で囲まれた図形の面積 S を m を用いて表せ。

- (4) (3) の面積 S が6となる m の値を求めよ。

□3 平面上に異なる定点 B, C と動点 A がある。3 点 A, B, C が三角形 ABC を作るとする。三角形 ABC の内接円の半径を r とし, 外接円の半径を R とする。各辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくと, 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積を S とするとき, $S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$ を示せ。

(2) 等式 $rR = \frac{abc}{2(a + b + c)}$ を示せ。

(3) $a = 1$ とする。動点 A が $b + c = 2$ を満たしながら動くとき, 積 rR の最大値を求めよ。

□4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - \log(n + 1) + 1$$

で定め, 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = e^{a_n}$ と定める。ただし, e は自然対数の底であって, $e = 2.71 \dots$ である。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $n \geq 2$ のとき, $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{e}{3}$ を示せ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

5 次の各問いに答えよ。

(1) $x = \cos \theta$ とする。 $\cos 3\theta$ を x を用いて表せ。

(2) 次の等式を満たす θ をすべて求めよ。

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + \frac{1}{2} = 0$$

ただし、 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(3) a, b, c を実数とし、3次方程式

$$4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

の解を α, β, γ とする。このとき a, b, c を、 α, β, γ を用いて表せ。

(4) $\cos 20^\circ, \cos 40^\circ, \cos 80^\circ$ の積 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ の値を求めよ。