

# 数 学

〔理学部(数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

## 注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は、**1** ~ **5** の5題ある。
4. 解答用紙は、**1** ~ **5** のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. **3** は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) 3辺の長さがそれぞれ2, 4,  $2\sqrt{5}$ である三角形に内接する円の面積を求めよ。
- (2)  $\theta = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ とする。有理数を係数とする4次の整式 $f(x)$ のうち、 $f(\theta) = 0$ を満たし4次の項の係数が1となるものを1つ答えよ。
- (3) 1個のサイコロを3回投げるとき、出る目の和が7以上である確率を求めよ。

2 座標平面上の2点A(0, 0), B(0, 5k)および放物線

$$C: y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$$

を考える。ただし、 $k > 0$ とする。

- (1) 点PがA, Bからの距離の比が3:2の点をすべて動くとき、Pの軌跡を求めよ。
- (2) (1)の軌跡と放物線Cの共有点の個数がちょうど2になるようなkの値の範囲を求めよ。

**3** 次の **3—1**, **3—2**, **3—3** から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

**3—1** 自然数  $n$  に対して、 $a_n, b_n$  を

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

を満たす有理数とする。ただし、4つの有理数  $a, b, c, d$  が

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$

を満たせば  $a = c$  かつ  $b = d$  が成り立つので、 $a_n, b_n$  は各自然数  $n$  に対し1通りに定まることに注意する。

- (1)  $n$  が3の倍数であるとき、 $a_n, b_n$  がともに整数となることを示せ。
- (2) 自然数  $n$  が3の倍数であるとき、 $a_n, b_n$  のどちらか一方が偶数で他方が奇数となることを示せ。
- (3)  $a_n, b_n$  がともに整数となるのは  $n$  が3の倍数のときに限ることを示せ。

**3—2** 空間に異なる4点P, A, B, Cがあり, 次の条件が満たされているとする。

- 三角形PABは1辺の長さが1の正三角形である。
- 線分PAと線分PCは正六角形の隣り合う2辺である。この正六角形を $\alpha$ とおく。
- 線分PBと線分PCは $\alpha$ とは異なる正六角形の隣り合う2辺である。この正六角形を $\beta$ とおく。

(1) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ , および $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ を求めよ。

さらに, 次の条件を満たすような異なる3点H, Q, Rを考える。

- Hは線分PA上にある。
- Qは3点P, A, Bによって定まる平面を直線PAで2分割した領域のBを含む側にあり, 線分HQは長さ1でPAに垂直である。
- Rは正六角形 $\alpha$ の内部にあり, 線分HRは長さ1でPAに垂直である。

(2)  $\overrightarrow{HQ}$ と $\overrightarrow{HR}$ を $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{PC}$ を用いてあらわせ。

(3)  $\overrightarrow{HQ}$ と $\overrightarrow{HR}$ のなす角を $\theta$ とするとき $\cos \theta$ を求めよ。

**3—3** 袋に赤玉4個と白玉2個が入っている。無作為に玉を1個取り出して, それが赤玉であれば白玉と, 白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える。この操作を2回繰り返したあと袋にある赤玉の数を $X$ とし, 一方, 3回繰り返したあと袋にある白玉の数を $Y$ とする。

- (1) 確率 $P(X=4)$ を求めよ。
- (2) 確率変数 $X$ の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。
- (3) 確率変数 $Y$ の期待値 $E(Y)$ を求めよ。

4  $x > 0$  で定義された曲線

$$C: y = (\log x)^2$$

を考える。

- (1)  $a$  を正の実数とするとき、点  $P(a, (\log a)^2)$  における曲線  $C$  の接線  $L$  の方程式を求めよ。
- (2)  $a > 1$  のとき、接線  $L$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標が最大となる場合の  $a$  の値  $a_0$  を求めよ。
- (3)  $a$  の値が (2) の  $a_0$  に等しいとき、直線  $L$  の  $y \geq 0$  の部分と曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた部分を、 $x$  軸の周りに 1 回転させてできる図形の体積を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

- (1)  $z_1, z_2$  を異なる 2 つの複素数とするとき、 $\frac{1 + iz_1}{z_1 + i} \neq \frac{1 + iz_2}{z_2 + i}$  となることを示せ。ただし、 $z_1 \neq -i, z_2 \neq -i$  とする。
- (2)  $w$  を  $i$  以外の複素数とするとき、 $\frac{1 + iz}{z + i} = w$  かつ  $z \neq -i$  を満たす複素数  $z$  が存在することを示せ。
- (3)  $-i$  以外の複素数  $z$  について、 $z$  の虚部が  $b$  となることと、 $w = \frac{1 + iz}{z + i}$  が  $\left| w - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$  を満たすことが同値になるように実数  $b$  を定めよ。

(裏)

令和5年度個別学力検査等

## 問題訂正等用紙

以下のとおり,

問題冊子に訂正があります。

解答用紙に訂正があります。

補足説明があります。

科目名 [ 数学 ]

1頁 **2** 3行目

(誤) . . . ただし,  $k > 0$  とする。

(正) . . . ただし,  $k$  は正の定数 とする。