令和５年度鹿児島大学AO型選抜試験
適性試問

[理学部理学科 数理情報科学プログラム]

令和４年11月15日（9:30 〜12:00）

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. 配布物は，問題冊子１部，解答用紙５枚，草案用紙５枚である。
3. 問題は $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{5}}$ の計５題ある。すべてについて解答すること。
4. ５枚の解答用紙には，$\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{5}}$ の問題番号が書いてある。それぞれの解答用紙に解答すること。
5. 受験番号は，必ず５枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
6. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
7. この試問では，論理的思考力，論証の記述力を主に評価する。したがって，解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。
8. 問題冊子と草案用紙は，各自持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $\vec{0}$でない2つの平面ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が垂直であるとする。このとき平面ベクトル$\vec{x}$に対して，次が成立することを示せ。

$$\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

(2) 自然数nについて，nの正の約数のうちnを除いたものの和がnになるとき，nは完全数であるという。例えば6の正の約数は1，2，3，6で，$1+2+3=6$なので，6は完全数である。自然数kについて2^k-1が素数であれば，$2^{k-1}(2^k-1)$は完全数であることを示せ。

(3) 実数x，yが$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=8$を満たすとき，$xy$の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ $c_n\neq 0$である整式

$$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

に対して，

$$f^*(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$$

という整式を$f(x)$の反転式と呼ぶことにする。また，この問題では0という整式は考えないことにする。

(1) 整式$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ $(c_n\neq 0)$に対して，$f^*(x)=x^nf(\frac{1}{x})$が成立することを証明せよ。

(2) $f(x)$を整式とする。0でない実数αが方程式$f(x)=0$の解ならば，$\frac{1}{\alpha}$は方程式$f^*(x)=0$の解であることを証明せよ。

(3) $3x^2+2x+1$の反転式はx^2+2x+3で，x^2+2x+3の反転式は$3x^2+2x+1$である。このように反転式の反転式は元の式に戻ることが多いが，そうでないこともある。反転式の反転式が元の式に戻らない例を，具体的に1つあげよ。

(4) $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$という3つの整式に$h(x)=f(x)g(x)$という関係が成立するとき，$h^*(x)=f^*(x)g^*(x)$となることを証明せよ。

$\boxed{3}$　4個のさいころを同時に1回投げる試行を考える。4個のさいころの出た目の積を X とする。

(1) X が偶数である確率を求めよ。

(2) 2または6の目が出たさいころの個数が1で，なおかつ，4の目が出たさいころの個数が0である確率を求めよ。

(3) X が4の倍数である確率を求めよ。

$\boxed{4}$　定数 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。関数

$$y = \frac{x\sin\theta + \cos\theta}{x\cos\theta - \sin\theta}$$

のグラフを C とする。

(1) 上の関数を $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ の形で表せ。ただし，p，q，k は定数である。

(2) 曲線 C と y 軸との交点をPとする。曲線 C の，点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(3) $t = \sin^2\theta$ とおく。曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を，t を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 正の実数 x，y，z について，$\frac{1}{z}$ が $\frac{1}{x}$ と $\frac{1}{y}$ の相加平均となるとき，z を x と y の調和平均という。$a > b$ を満たす正の実数 a，b を考える。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次を満たしているとする。

- $a_1 = a$，$b_1 = b$
- a_{n+1} は a_n と b_n の相加平均で，b_{n+1} は a_n と b_n の調和平均である。つまり，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$$

このとき数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はどちらも a と b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ に収束する。このことを確かめよう。

(1) $a_nb_n = ab$ となることを示せ。

(2) 次の等式を示せ。

$$a_{n+1} - \sqrt{ab} = \frac{\left(a_n - \sqrt{ab}\right)^2}{2a_n}$$

(3) 次の不等式を示せ。

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{ab}\right| < \frac{1}{2}\left|a_n - \sqrt{ab}\right|$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$ を示せ。