数　学

〔理学部（数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・
地球科学プログラム）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて 4 ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の 5 題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて 1 枚ずつ計 5 枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

⑴　4 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 3 個のさいころの出る目が同じになる確率を求めよ。

⑵　次の不等式を解け。

$$|x^2 + 6x - 1| \leqq 7 - x$$

⑶　次の数の大小関係を調べ，小さい順に並べよ。
ただし，$3.1 < \pi < 3.2$ を用いてよい。

$$\frac{1}{2},\ \log_{11}\pi,\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

$\boxed{2}$ 次の関数を考える。

$$y = 4\sin^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

また，$x = \sin\theta - \cos\theta$ とする。

⑴　x のとりうる値の範囲を求めよ。

⑵　y を x の関数で表せ。

⑶　y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

3 次の **3 — 1** , **3 — 2** , **3 — 3** から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

3 — 1 $c \geqq 3$ である実数 c に対して，x の2次方程式

$$x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) 2次方程式①は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ。

(1)の結果を用いて，次のように数列 $\{a_n\}$ を定める。$a_1 = 3$ とする。$c = a_1$ のときの方程式①の実数解のうち，a_1 より大きい方を a_2 とおく。次に $a_2 > 3$ が成り立つことに注意して，$c = a_2$ のときの方程式①の実数解のうち，a_2 より大きい方を a_3 とおく。これを繰り返す。すなわち，$3 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ が成り立ち，2次方程式

$$x^2 - 2(a_n+1)x + a_n^2 - 2a_n + 9 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} である。

(2) $n \geqq 2$ とする。2次方程式②の実数解のうち，小さい方は a_{n-1} であることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

(4) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 — 2 座標空間において，点 A$(2, 0, 4)$，点 B$(3, -2, 5)$を通る直線を l，点 C$(3, 2, 2)$，点 D$(4, 3, 0)$を通る直線を m とする。

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を，0° と 180° の間の範囲で答えよ。

(2) 直線 l，m が交わるか交わらないか調べよ。

(3) 直線 l，m の両方と交わり，両方と直交する直線を n とする。n と l の交点，および n と m の交点を求めよ。

3 — 3 袋の中に -1，0，1 が書かれたカードがそれぞれ 1 枚，1 枚，m 枚ずつ入っている。ただし，m は自然数である。この袋の中から無作為に 2 枚同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1) $m = 2$ のとき，確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよ。

(2) $m = 9$ のとき，確率 $P(Y = 1)$ を求めよ。

(3) XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち，最小のものを求めよ。

4 座標平面上で，放物線 C が次の方程式で与えられている。

$$C: \quad 4x - 4y^2 - 3 = 0$$

原点 O から放物線 C に引いた接線で，傾きが正のものを l とする。また，直線 l と放物線 C との共有点を A とする。

(1) 直線 l の方程式，および A の座標を求めよ。

(2) 直線 l と点 A で接する円で，放物線 C との共有点が 2 個であるものを求めよ。

(3) 放物線 C，直線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 n を自然数とし，次の整式を考える。

$$f(x) = x^{6n} + x^{3n} - 2,$$
$$g(x) = x^2 + x + 1, \qquad h(x) = x^2 - x + 1$$

(1) 方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし，方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ。

ここで，$f(x)$ を 2 次式で割ると，商が $(6n - 2)$ 次式，余りが 1 次以下の整式になることに注意すると

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，$q(x)$ は $(6n - 2)$ 次式，
$r(x)$ は 1 次以下の整式

と書ける。

(2) $r(x) = 0$，つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

(3) $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，n は偶数であることを示せ。

(4) $n = 1$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ。