

# 令和6年度鹿児島大学AO型選抜試験 適性試問

## [理学部理学科 数理情報科学プログラム]

令和5年11月21日(9:30～12:00)

### 注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. 配付物は、問題冊子1部、解答用紙5枚、草案用紙5枚である。
3. 問題は **1**～**5** の計5題ある。すべてについて解答すること。
4. 5枚の解答用紙には、**1**～**5** の問題番号が書いてある。それぞれの解答用紙に解答すること。
5. 受験番号は、必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
6. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
7. この試問では、論理的思考力、論証の記述力を主に評価する。したがって、解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。
8. 問題冊子と草案用紙は、各自持ち帰ること。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 1000以下の自然数全体の集合を全体集合とする。その中で4の倍数全体の集合を  $A$  とし、7の倍数全体の集合を  $B$  とする。集合  $\overline{A} \cap B$  の要素の個数を求めよ。

(2)  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲で  $y = \left| \cos x + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}$  のグラフを描け。ただし、 $x$  軸、 $y$  軸との共有点、最大値、最小値およびそのときの  $x$  の値も記入すること。

(3) 2次方程式  $x^2 - 5x + 9 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とおくと、 $\alpha^2 - 1, \beta^2 - 1$  という2つの数を解とする2次方程式を作れ。

(4) 定積分を利用して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n}$  を求めよ。

2 1枚のコインを8回続けて投げる。

(1) 表がちょうど3回出る確率を求めよ。

(2) 表がちょうど5回出て、しかもそのうちちょうど4回が連続する確率を求めよ。

(3) 表が5回以上続けて出る確率を求めよ。

3 平行六面体 ABCD-EFGH を考える。線分 BF 上に点 P, 線分 DH 上に点 Q があり  $\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BF}$ ,  $\overrightarrow{DQ} = t\overrightarrow{DH}$  を満たす。さらに線分 EP と線分 EQ を 2 辺とする平行四辺形のもう 1 つの頂点を R とする。このとき次の各問いに答えよ。ただし線分はその両端を含むものとする。

(1) R は直線 GC 上にあることを示せ。

(2) R が線分 GC 上にない場合を考える。直線 BC と直線 PR の交点を S, 直線 DC と直線 QR の交点を T とする。

(i) 座標平面上に点  $(s, t)$  の取り得る範囲を図示せよ。

(ii) 線分 BS と線分 SC の長さの比を  $s$  と  $t$  を用いて表せ。

(iii) S が辺 BC を 5:3 に内分し, T が辺 DC を 2:3 に内分する。 $s$  と  $t$  を求めよ。

4 初項を  $a_1 = 6$ ,  $b_1 = 1$  とし, 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える。

$$a_{n+1} = 9a_n + 9b_n$$

$$b_{n+1} = -4a_n - 3b_n$$

このとき次の各問いに答えよ。

(1) 数列  $\{c_n\}$ ,  $\{d_n\}$  を  $c_n = 2a_n + 3b_n$ ,  $d_n = a_n + b_n$  で定めるとき,

$$c_{n+1} = \alpha c_n + \beta d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$d_{n+1} = \gamma c_n + \delta d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす実数  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  を求めよ。

(2) 数列  $\{c_n\}$  の一般項を求めよ。

(3) 数列  $\{d_n\}$  の一般項を求めよ。

(4) 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。

5 以下、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で考える。関数  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  を

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$$

とし、関数  $h(x)$  を

$$h(x) = \{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2$$

とする。

- (1)  $h'(x) = 0$  を満たす実数  $x$  ( $0 < x < 1$ ) がちょうど2つあることを示せ。
- (2) 関数  $h(x)$  の増減を調べよ。ただし(1)の2つの実数は  $a, b$  ( $a < b$ ) とおくことにし、 $a, b, h(a), h(b)$  の具体的な値を求める必要はない。
- (3) 方程式  $f_1(x) = f_2(x)$  の  $0 < x < 1$  の範囲における解が  $\frac{1}{2}$  のみであることを示せ。