

数 学

〔教育学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は、**1** ～ **3** の3題ある。
4. 解答用紙は、**1** ～ **3** のそれぞれについて1枚ずつ計3枚ある。
5. **2** **3** は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\cos 2\theta > \sin \theta$ を解け。

(2) x, y, z を正の実数とする。

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (x + y + z)$$

のとりうる値の最小値を求めよ。また、最小値をとるときの x, y, z の条件を求めよ。

(3) 次の **(ア)**，**(イ)** に当てはまるものを、下の選択肢(あ)～(え)のうちから一つずつ選び、その理由を説明せよ。ただし、選択肢については、同じものを繰り返し選んでもよい。

- 実数 a, b について、「 $a + b = 2$ かつ $a - b = 0$ 」であることは、「 $(a - 1)(b - 1) = 0$ 」であるための **(ア)**。
- 実数 a, b, c について、「 $ax^2 + bx + c = 0$ を満たす実数 x が存在する」ことは、「 $ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である」ための **(イ)**。

(あ) 必要条件であるが十分条件ではない

(い) 十分条件であるが必要条件ではない

(う) 必要十分条件である

(え) 必要条件でも十分条件でもない

2 次の **2—1** , **2—2** から 1 題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

2—1 次の各問いに答えよ。

(1) 次の方程式を解け。

$$3 \log_8 (3x + 7) = 2 \log_2 (x + 1)$$

(2) x に関する方程式

$$\log_8 (3x + a - 2) = \log_2 (x - 2)$$

が異なる実数解をちょうど 2 つもつとき、実数 a の値の範囲を求めよ。

2—2 座標平面において、曲線 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) を C とする。 C の接線で点 $P(4, 0)$ を通るものを直線 l とし、曲線 C と直線 l の接点を Q とする。

(1) 直線 l の方程式および点 Q の座標を求めよ。

(2) 曲線 C 、直線 PQ および直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) (2) で定めた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3 次の **3—1**, **3—2**, **3—3** から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

3—1 初項を $a_1 = 1$, $b_1 = 3$ とし、次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$a_{n+1} = (1 - 2 \cdot 3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = -4 \cdot 3^{n-1}a_n + (2 \cdot 3^{n-1} + 1)b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = -2a_n + b_n$ で定める。このとき、 $c_{n+1} = c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (2) $d_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき、数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

3—2 座標空間において、点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球 S と、点 $(0, 0, 2)$ を通り z 軸に垂直な平面 α と、点 $F(0, 1, 0)$ がある。

- (1) 点 A を球 S 上の点とする。直線 FA と平面 α との交点を A' とする。 A の z 座標が k であるとき、 $\overrightarrow{FA'} = \frac{2}{k} \overrightarrow{FA}$ となることを示せ。ただし、 $k \neq 0$ とする。
- (2) 球 S 上に 2 点 $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ と $C(1, 0, 1)$ をとる。直線 FB と平面 α との交点を B' 、直線 FC と平面 α との交点を C' とする。 B' 、 C' の座標を求めよ。
- (3) 2 点 B' 、 C' を(2)で定めた点とする。点 P は平面 α 上を動き、 $\overrightarrow{PB'}$ と $\overrightarrow{PC'}$ が垂直になるとき、点 P の軌跡を求めよ。ただし、 $\overrightarrow{PB'} \neq \vec{0}$ 、 $\overrightarrow{PC'} \neq \vec{0}$ とする。

3—3 A と B があるゲームを繰り返し行い、先に 3 回勝った方を優勝とする。第 1 ゲームでは A が先攻とし、それ以降は先攻と後攻を交互に入れかえてゲームを行う。各ゲームでは引き分けはなく、必ず勝敗がつくとする。各ゲームで A が B に勝つ確率は、 A が先攻のとき $\frac{2}{3}$ 、後攻のとき $\frac{1}{2}$ とする。

- (1) 第 3 ゲームで優勝が決まる確率を求めよ。
- (2) 第 5 ゲームで優勝が決まる確率を求めよ。
- (3) B が優勝する確率を求めよ。

