数　　学

〔理学部（数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・
地球科学プログラム）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて５ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の５題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて１枚ずつ計５枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos 2\theta > \sin \theta$ を解け。

(2) x，y，z を正の実数とする。

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$$

のとりうる値の最小値を求めよ。また，最小値をとるときの x，y，z の条件を求めよ。

(3) 次の $\boxed{（ア）}$，$\boxed{（イ）}$ に当てはまるものを，下の選択肢（あ）～（え）のうちから一つずつ選び，その理由を説明せよ。ただし，選択肢については，同じものを繰り返し選んでもよい。

- 実数 a，b について，「$a+b=2$ かつ $a-b=0$」であることは，「$(a-1)(b-1)=0$」であるための $\boxed{（ア）}$。
- 実数 a，b，c について，「$ax^2+bx+c=0$ を満たす実数 x が存在する」ことは，「$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である」ための $\boxed{（イ）}$。

（あ）必要条件であるが十分条件ではない
（い）十分条件であるが必要条件ではない
（う）必要十分条件である
（え）必要条件でも十分条件でもない

2 次の各問いに答えよ。

(1) 次の方程式を解け。

$$3\log_8(3x+7) = 2\log_2(x+1)$$

(2) x に関する方程式

$$\log_8(3x+a-2) = \log_2(x-2)$$

が異なる実数解をちょうど2つもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$，$\boxed{3-2}$，$\boxed{3-3}$ から１題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 初項を $a_1 = 1$，$b_1 = 3$ とし，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$a_{n+1} = (1 - 2\cdot 3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_{n+1} = -4\cdot 3^{n-1}a_n + (2\cdot 3^{n-1} + 1)b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = -2a_n + b_n$ で定める。このとき，$c_{n+1} = c_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $d_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

3 — 2 座標空間において，点$(0,0,1)$を中心とする半径1の球Sと，点$(0,0,2)$を通りz軸に垂直な平面αと，点F$(0,1,0)$がある。

(1) 点Aを球S上の点とする。直線FAと平面αとの交点をA$'$とする。Aのz座標がkであるとき，$\overrightarrow{\mathrm{FA'}}=\dfrac{2}{k}\overrightarrow{\mathrm{FA}}$となることを示せ。ただし，$k \fallingdotseq 0$とする。

(2) 球S上に2点B$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$とC$(1,0,1)$をとる。直線FBと平面$\alpha$との交点をB$'$，直線FCと平面$\alpha$との交点をC$'$とする。B$'$，C$'$の座標を求めよ。

(3) 2点B$'$，C$'$を(2)で定めた点とする。点Pは平面α上を動き，$\overrightarrow{\mathrm{PB'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PC'}}$が垂直になるとき，点Pの軌跡を求めよ。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PB'}} \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC'}} \fallingdotseq \vec{0}$とする。

3 — 3 AとBがあるゲームを繰り返し行い，先に3回勝った方を優勝とする。第1ゲームではAが先攻とし，それ以降は先攻と後攻を交互に入れかえてゲームを行う。各ゲームでは引き分けはなく，必ず勝敗がつくとする。各ゲームでAがBに勝つ確率は，Aが先攻のとき$\dfrac{2}{3}$，後攻のとき$\dfrac{1}{2}$とする。

(1) 第3ゲームで優勝が決まる確率を求めよ。

(2) 第5ゲームで優勝が決まる確率を求めよ。

(3) Bが優勝する確率を求めよ。

4 3つの複素数 $\alpha = 4 + 3i$，$\beta = x + i$，$\gamma = 8i$ および複素数平面上の対応する点 A(α)，B(β)，C(γ) を考える。ただし，x は実数で，i は虚数単位とする。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数となるような x の値を求めよ。

(2) 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような x の値を求めよ。

(3) x が実数全体を動くとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の虚部の最大値および最小値を求めよ。

5 e を自然対数の底とし，

$$f(x) = \frac{e^x - 2e^{-2x}}{e^x + e^{-2x}}$$

とおく。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l とする。また，l と直線 $y = 1$ との交点を $(a, 1)$ とする。

(1) 接線 l の方程式と，a の値を求めよ。

(2) (1)で求めた接線 l の方程式を $y = g(x)$ とおく。$x > 0$ のとき，$f(x) < g(x)$ であることを示せ。

(3) 曲線 C，接線 l および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ。

(4) 実数 r は $r > a$ を満たすとする。曲線 C，直線 $y = 1$，$x = a$ および $x = r$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。(3)で定めた S_1 を用いて $S(r) = S_1 + S_2$ と定めるとき，$S(r)$ を求めよ。さらに，$\lim_{r \to \infty} S(r)$ を求めよ。