

数 学

〔理学部(数理情報科学プログラム／物理・宇宙プログラム／地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて2ページである。
3. 問題は、**1** ～ **4** の4題ある。
4. 解答用紙は、**1** ～ **4** のそれぞれについて1枚ずつ計4枚ある。
5. 「解答始め」の合図があったら、まず、掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
6. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし、裏面には決して記入しないこと。
7. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) 点 O を中心とする円の円周上に異なる 2 点 A, B がある。線分 AB の長さが 8 であるとき、内積 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ を求めよ。
- (2) 関数 $y = x|x - 1|$ のグラフをかけ。
- (3) 自然数 n に対し、

$$|x| + |y| \leq n$$

を満たす整数 x と y の組 (x, y) の個数を、 n を用いて表せ。ただし、例えば $(0, 1)$ と $(1, 0)$ は異なる組として数えるとする。

- (4) 文字 A が 2 個、文字 B が 2 個、文字 C が 1 個ある。この 5 文字を一行に並べるとき、2 つの A が隣り合わず、かつ 2 つの B も隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

2 袋には白い球が 8 個、赤い球が 2 個入っており、ここから球を 1 個ずつ無作為に続けて取り出す。一度取り出した球は袋に戻さないこととする。

- (1) 1 回目に白い球が出て、かつ 2 回目に赤い球が出る確率を求めよ。
- (2) 2 回目に赤い球が出る確率を求めよ。
- (3) 3 回目に赤い球が出る確率を求めよ。
- (4) 続けて 3 回取り出したとき、取り出した白い球の個数の期待値を求めよ。

- 3 実数 a は $0 < a < 1$ を満たし、曲線 C_a が次の方程式で与えられている。

$$C_a : \frac{\left(x - \frac{a}{1-a}\right)^2}{\left(\frac{a}{1-a}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2(1+a)}{1-a}} = 1$$

- (1) 座標平面において、曲線 C_a によって囲まれる部分の面積 $S_1(a)$ を、 a を用いて表せ。
- (2) 座標平面において、点 $(a, a + a^2)$ における曲線 C_a の接線 l_a の方程式が $y = ax + a$ であることを示せ。
- (3) 座標平面において、3直線 l_a 、 x 軸、および $x = \frac{a}{1-a}$ で囲まれた三角形の面積を $S_2(a)$ とする。実数 a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a) = \frac{S_2(a)}{S_1(a)}$ の最小値を求めよ。また、そのときの a の値を求めよ。

- 4 自然数 n に対し、定積分 I_n を次のように定める。

$$I_n = \int_0^n \frac{3x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx$$

- (1) 次の式が x についての恒等式であるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

$$\frac{3x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

- (2) $\tan \theta_n = n, 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ_n が存在することを示せ。
- (3) I_n を求めよ。ただし、 n, θ_n を用いてよい。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}$ を用いてよい。

